

SOLUCIONES

(Documento de trabajo orientativo)

Pregunta 1.- Eris es un planeta enano del sistema solar descubierto en enero de 2005 por un equipo del observatorio del Monte Palomar dirigido por Michael E. Brown. Es el objeto transneptuniano más masivo, el segundo más grande después de Plutón, y el cuerpo más grande del sistema solar que no ha sido visitado por una sonda espacial. Tiene un diámetro de 2330 km, ligeramente inferior al de Plutón, y su densidad es de $2,5 \text{ g cm}^{-3}$. La órbita de Eris es muy excéntrica; actualmente el planeta se encuentra a su máxima distancia del Sol (afelio), a $1,45 \cdot 10^{13} \text{ m}$, llegando a situarse a $5,24 \cdot 10^{12} \text{ m}$ del Sol durante su perihelio.

- a) (1 punto) Calcule la masa del planeta y el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie.
b) (1,5 puntos) Sabiendo que la energía mecánica de un objeto de masa m_1 que orbita alrededor de un objeto de masa m_2 con una órbita elíptica de semieje mayor a es

$$E_{mec} = -\frac{Gm_1m_2}{2a},$$

donde G es la constante de la gravitación universal, halle la energía mecánica de Eris y calcule la velocidad orbital que tendrá en el perihelio.

Datos: Constante de gravitación universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$; Masa del Sol, $M_{Sol} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.

Solución:

- a) Para calcular la masa del planeta, primero debemos obtener su volumen:

$$R = \frac{D}{2} = 1165 \text{ km} \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 6,62 \cdot 10^{18} \text{ m}^3$$

Con ello calculamos la masa de Eris:

$$M_{eris} = \rho V = 1,66 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

Ahora, conociendo la masa y radio de un cuerpo esférico, el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie es:

$$g = \frac{GM_{eris}}{R^2} = 0,82 \text{ m s}^{-2}$$

- b) El semieje mayor de la órbita elíptica puede obtenerse a través de su afelio y perihelio:

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = 9,87 \cdot 10^{12} \text{ m}$$

Ahora, la energía mecánica de un objeto alrededor del Sol depende de la masa de este y del planeta, y del semieje mayor de su órbita:

$$E_m = -\frac{GM_{Sol}M_{eris}}{2a} = -1,11 \cdot 10^{29} \text{ J}$$

La velocidad orbital de Eris en el perihelio puede obtenerse a partir de la conservación de la energía mecánica:

$$E_m = \frac{1}{2}M_{eris}v_p^2 - \frac{GM_{Sol}M_{eris}}{r_p} \Rightarrow v_p = \sqrt{2GM_{Sol}\left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{2a}\right)} = 6,1 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$$

Pregunta 2.A.- Un electrón de carga $-e$ y un positrón de carga $+e$ se encuentran inicialmente fijos en el plano xy en las posiciones $(0, 6)$ nm y $(0, -6)$ nm, respectivamente.

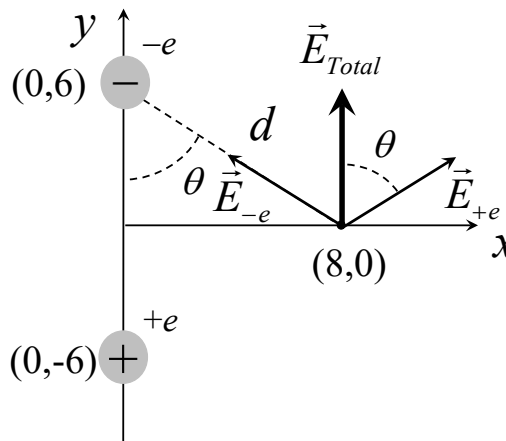
- (1,25 puntos) Obtenga el campo eléctrico en el punto $(8, 0)$ nm debido a ambas partículas.
- (1,25 puntos) Si al positrón se le imprime una velocidad de $-1,5 \cdot 10^5 \text{ m s}^{-1} \vec{j}$, permaneciendo fijo el electrón, determine la máxima distancia de alejamiento entre ambas partículas.

Datos: Constante de la ley de Coulomb, $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$; Valor absoluto de la carga del electrón y del positrón, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; Masa del electrón y del positrón, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

Solución:

- Para obtener el campo eléctrico en $(8, 0)$, primero calculamos la distancia d y el ángulo θ según el dibujo adjunto:

$$d = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ nm}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{8}{6}\right) = 53,13^\circ$$



Al ser la distancia d a ambas cargas iguales, así como el valor absoluto de sus cargas, el módulo del campo eléctrico que producen en el punto $(8, 0)$ será igual, y de valor:

$$|E_{-e}| = |E_{+e}| = K \frac{q}{d^2} = 1,44 \cdot 10^7 \text{ N C}^{-1}$$

Teniendo en cuenta la geometría de la figura, la componente x del campo eléctrico total será cero, y el campo producido por ambas cargas queda como:

$$\vec{E}_{Total} = 2K \frac{q}{d^2} \cos \theta \vec{j} = 1,73 \cdot 10^7 \text{ N C}^{-1} \vec{j}$$

- Al ser el campo eléctrico conservativo, se puede aplicar la conservación de la energía entre el punto inicial A y el punto de máximo alejamiento B en el que la velocidad será nula.

La energía cinética en A es:

$$E_{cin,A} = \frac{1}{2} m v_A^2 = 1,02 \cdot 10^{-20} \text{ J}$$

La energía potencial eléctrica en A, siendo $2y_0 = 12 \text{ nm}$ la distancia inicial entre ambas cargas, será:

$$E_{pot,A} = -K \frac{q^2}{2y_0} = -1,92 \cdot 10^{-20} \text{ J}$$

La energía cinética en B será cero. Llamando d' la distancia de máximo alejamiento entre cargas, la energía potencial eléctrica en B será:

$$E_{pot,B} = -K \frac{q^2}{d'}$$

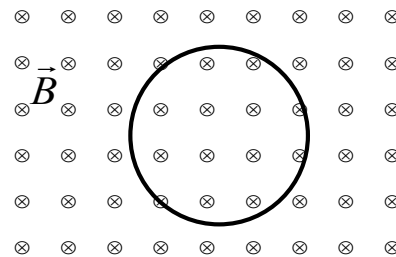
La conservación de la energía mecánica establece:

$$E_{cin,A} + E_{pot,A} = E_{cin,B} + E_{pot,B}$$

De aquí puede obtenerse directamente d' :

$$d' = -K \frac{q^2}{(E_{cin,A} + E_{pot,A})} = 2,57 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

Pregunta 2.B.- Una espira conductora circular de radio 20 cm se encuentra en el seno de un campo magnético homogéneo perpendicular al plano de la espira (ver figura). Si la espira tiene una resistencia de $40\ \Omega$, calcule la máxima intensidad de corriente que circulará por la espira en los siguientes casos:



- (1,25 puntos) El módulo del campo magnético es constante de valor $B = 150\text{ mT}$, y la espira gira en torno a uno de sus diámetros con una velocidad angular de 50 rad s^{-1} .
- (1,25 puntos) La espira se encuentra fija, y el módulo del campo magnético varía con el tiempo conforme a $B = B_0 \sin(\omega t)$, con $B_0 = 200\text{ mT}$ y $\omega = 75\text{ rad s}^{-1}$.

Solución:

- Para calcular la intensidad de corriente, es preciso obtener la f_{em} inducida a través de la variación temporal del flujo del campo magnético a través de ella.
El flujo viene dado en este caso como:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B\pi r^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

donde r es el radio de la espira, ω su velocidad angular, y φ el ángulo inicial entre el vector superficie $\vec{S}$ de la espira y el campo magnético $\vec{B}$.

La f_{em} inducida será la derivada temporal de ese flujo:

$$f_{em} = -\frac{d\Phi}{dt} = B\pi r^2 \omega \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow f_{em_{\text{máx}}} = B\pi r^2 \omega = 0,942\text{ V}$$

Si la resistencia eléctrica de la espira es R , la corriente máxima que circulará por ella, aplicando la ley de Ohm, es:

$$I_{\text{máx}} = \frac{f_{em_{\text{máx}}}}{R} = 0,0236\text{ A} = 23,6\text{ mA}$$

- Procediendo de forma análoga al apartado anterior, el flujo es en este caso:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B_0 \sin(\omega t) \pi r^2$$

Y la f_{em} inducida será:

$$f_{em} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_0 \omega \cos(\omega t) \pi r^2 \Rightarrow f_{em_{\text{máx}}} = B_0 \omega \pi r^2 = 1,88\text{ V}$$

Aplicando la ley de Ohm obtenemos finalmente:

$$I_{\text{máx}} = \frac{f_{em_{\text{máx}}}}{R} = 0,0471\text{ A} = 47,1\text{ mA}$$

Pregunta 3.A.- Una ballena sumergida en el mar a una cierta profundidad emite un potente sonido grave de 60 Hz y 25 m de longitud de onda. Un barco A, situado sobre su vertical, detecta dicho sonido con su sónar 80 ms después de ser emitido, y poco tiempo después es detectado por otro barco B situado a 300 m del barco A.

- (1 punto) Halle la profundidad a la que se encuentra la ballena.
- (1,5 puntos) Si el barco A recibe el sonido con una intensidad de $3 \mu\text{W m}^{-2}$, calcule la potencia del sonido emitido por la ballena y el nivel de intensidad sonora que detectará el barco B.

Dato: Intensidad umbral, $I_0 = 1 \cdot 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$.

Solución:

- En primer lugar obtenemos la velocidad con la que se propaga el sonido en el agua mediante la relación entre la frecuencia f , longitud de onda λ y la velocidad de propagación v de una onda:

$$v = \lambda f = 1500 \text{ m s}^{-1}$$

Ahora, la distancia entre la ballena y el barco A será la profundidad h a la que se encuentra la ballena:

$$h = vt = 120 \text{ m}$$

con $v = 1500 \text{ m s}^{-1}$ y $t = 0,08 \text{ s}$.

- Para calcular la potencia P del sonido de la ballena utilizamos la relación entre la intensidad percibida I y la distancia r entre la fuente y el punto de detección:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2} \Rightarrow P = 4\pi I_A h^2 = 0,543 \text{ W}$$

Si D es la distancia entre barcos, la distancia entre la ballena y el barco B será:

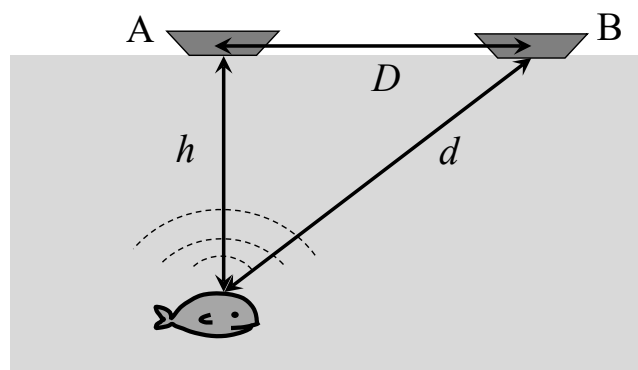
$$d = \sqrt{D^2 + h^2} = 323 \text{ m}$$

y la intensidad detectada por el barco B es:

$$I_B = \frac{P}{4\pi d^2} = I_A \left(\frac{h}{d} \right)^2 = 0,414 \mu\text{W m}^{-2}$$

El nivel de intensidad sonora será finalmente:

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I_B}{I_0} = 56,17 \text{ dB}$$



Pregunta 3.B.- Considere la imagen formada por una lente delgada de distancia focal f' de un objeto situado a una distancia s a la izquierda de la lente.

- a) (1 punto) Demuestre que el aumento lateral M tiene la siguiente expresión en función de la distancia focal f' y la posición del objeto s :

$$M = \frac{f'}{f' + s}$$

- b) (0,5 puntos) Considerando la expresión obtenida en el apartado anterior, razone si una lente divergente puede formar una imagen invertida.
c) (1 punto) Dibuje el trazado de rayos a través del sistema óptico de la imagen formada por una lente divergente si el objeto se sitúa a una distancia dos veces su distancia focal.

Solución:

- a) Partimos de la ley gaussiana de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$$

Despejando la posición de la imagen s' , obtenemos:

$$s' = \frac{1}{\frac{1}{f'} + \frac{1}{s}} = \frac{f' s}{f' + s}$$

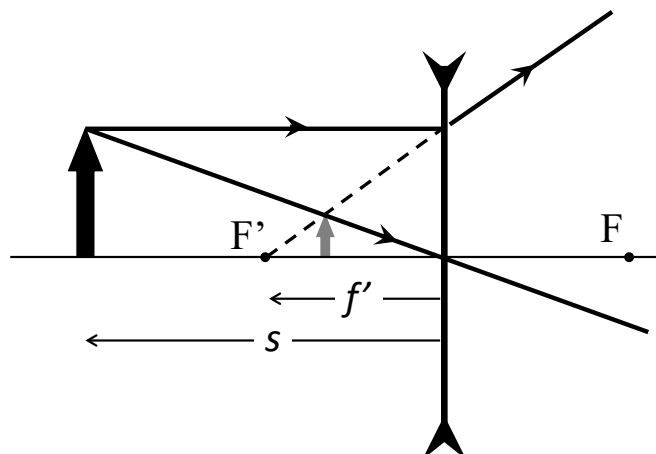
Ahora, utilizando la fórmula para el aumento lateral M :

$$M \equiv \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

Sustituyendo s' en el aumento lateral, se obtiene finalmente:

$$M = \frac{f' s}{s (f' + s)} = \frac{f'}{f' + s}$$

- b) Si el objeto está situado a la izquierda de la lente, la posición del objeto s es negativa ($s < 0$). Además, para una lente divergente la distancia focal también es negativa ($f' < 0$). Por consiguiente, tanto el numerador como el denominador en la expresión anterior son negativos, por lo que su cociente M será siempre positivo. Al ser el aumento lateral positivo, la imagen será siempre derecha (nunca podrá ser invertida).
c) Situamos las posiciones del objeto y la focal imagen. A partir de ahí, un rayo que incide paralelamente a la lente pasará por el foco imagen F' (en este caso dibujamos también su prolongación); además, un rayo que incida sobre el centro de la lente no sufrirá desviación. La intersección de ambos rayos nos da la posición del extremo superior de la imagen del objeto (en este caso una imagen virtual, al ser la prolongación de los rayos los que intersectan).



Pregunta 4.A.- Las moléculas de ozono absorben luz ultravioleta (UV) de alta energía, lo que evita que llegue a la superficie de la Tierra demasiada radiación dañina para los seres vivos.

- a) (1 punto) Halle la diferencia de energía, expresada en electrón-voltios, entre los niveles electrónicos de la molécula de ozono que inducen la absorción de radiación de 260 nm.
- b) (1,5 puntos) Si el flujo de fotones de 260 nm que le llega a una persona con su cuerpo expuesto al sol es de $2,6 \cdot 10^{14}$ fotones s^{-1} , calcule la potencia que le incide debida a esos fotones UV y la energía recibida en 30 minutos.

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; Constante de Planck, $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J s; Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1} .

Solución:

- a) La desexcitación electrónica entre dos niveles electrónicos separados una energía E provoca la emisión de un fotón con una energía $E_{\text{fotón}}$ igual a la diferencia de energía entre ambos niveles. Según la ecuación de Planck, además, la energía de un fotón es igual al producto de la constante de Planck h por su frecuencia f , con lo que se tiene:

$$E_{\text{fotón}} = hf = \frac{hc}{\lambda} = 7,65 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

donde se ha utilizado la relación existente entre la frecuencia f y la longitud de onda λ de la radiación a través de la velocidad de la luz c .

Esta energía expresada en electronvoltios será:

$$E_{\text{fotón}}(eV) = \frac{E_{\text{fotón}}(J)}{e} = 4,78 \text{ eV}$$

- b) La potencia P de un haz de luz (energía por unidad de tiempo) es el flujo de fotones Φ (número de fotones por unidad de tiempo que transporta el haz) multiplicado por la energía de cada fotón individual $E_{\text{fotón}}$:

$$P = \Phi E_{\text{fotón}} = \Phi hf = \Phi \frac{hc}{\lambda} = 1,99 \cdot 10^{-4} \text{ W}$$

La energía recibida por ese haz de luz será la potencia transportada multiplicada por el tiempo de exposición:

$$E_{\text{recibida}} = P \cdot t = 0,358 \text{ J}$$

Pregunta 4.B.- El mineral de cuarzo (SiO_2) sobre la superficie de la Tierra contiene impurezas de aluminio, con una cantidad de 0,1 % de átomos de ^{26}Al en relación a los átomos de silicio. Cuando el mineral se entierra debido a diversos procesos geológicos (sedimentación, glaciares, etc.) los átomos de ^{26}Al se desintegran con un tiempo de semidesintegración de 0,72 millones de años.

- (1,25 puntos) Calcule la actividad de una muestra de mineral de cuarzo, debida a la presencia de isótopos de ^{26}Al , situada en superficie si contiene $8,3 \cdot 10^{22}$ átomos de silicio.
- (1,25 puntos) Se recoge una muestra de cuarzo de unos sedimentos, obteniéndose una relación de 0,08 % de átomos de ^{26}Al respecto a los átomos de silicio. Obtenga la edad correspondiente a la formación de dichos sedimentos.

Solución:

- En primer lugar expresamos el tiempo de semidesintegración en unidades de segundos:

$$T_{1/2} = 2,27 \cdot 10^{13} \text{ s}$$

Su relación con la vida media es:

$$\tau = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} = 3,27 \cdot 10^{13} \text{ s} = 1,04 \cdot 10^6 \text{ años}$$

Su inversa es la constante de desintegración radiactiva:

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = 3,05 \cdot 10^{-14} \text{ s}^{-1}$$

Por otra parte, el número de núcleos radiactivos es:

$$N_{Al} = N_{Si} \left[\frac{^{26}\text{Al}}{\text{Si}} \right] = 8,3 \cdot 10^{19} \text{ núcleos}$$

De aquí ya se puede calcular la actividad de la muestra:

$$A = \lambda N_{Al} = 2,53 \cdot 10^6 \text{ Bq}$$

- La relación entre el número de núcleos de aluminio iniciales y los que quedarán al cabo de un cierto tiempo t será:

$$\frac{N_0}{N(t)} = \frac{\left[\frac{^{26}\text{Al}}{\text{Si}} \right]_0}{\left[\frac{^{26}\text{Al}}{\text{Si}} \right]_t} = 1,25$$

Utilizando ahora la ley de desintegración radiactiva obtenemos:

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau} \Rightarrow e^{t/\tau} = \frac{N_0}{N(t)}$$

De aquí se calcula el tiempo t para el cual la concentración de átomos de ^{26}Al es 0,08 %:

$$t = \tau \ln \left[\frac{N_0}{N(t)} \right] = 7,31 \cdot 10^{12} \text{ s} = 0,232 \text{ millones de años}$$